

---

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### Φυλλάδιο 9

---

## 1 Η εξίσωση δευτέρου βαθμού στο επίπεδο

**Άσκηση 1.1** Τι παριστάνουν στο επίπεδο  $Oxy$  οι παρακάτω εξισώσεις;

(α)  $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$ .

(β)  $x^2 + xy - y^2 - 2x - y + 1 = 0$ .

(γ)  $2y^2 - 8x + 4y - 1 = 0$ .

**Άσκηση 1.2** Να βρεθεί η εκκέντρωση, τα μήκη των ημιαξόνων καθώς και οι εστίες των παρακάτω κωνικών τομών:

(α)  $2xy = 1$ ,

(β)  $5x^2 - 6\sqrt{3}xy - y^2 + 16 = 0$ ,

(γ)  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$ .

**Άσκηση 1.3** Δίνεται στο επίπεδο  $Oxy$  η εξίσωση

$$5x^2 + 20xy + 20y^2 + 34x + 12y + 8 = 0.$$

Να βρεθεί τι παριστάνει και να σχεδιαστεί προσεγγιστικά.

**Άσκηση 1.4** Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(3, 4)$  και έχει ασύμπτωτες τις  $\varepsilon_1 : 3x - 2y + 1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 : 3x + 2y - 7 = 0$ .

**Άσκηση 1.5** Στο επίπεδο  $Oxy$  δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 7 = 0$ .

(α) Να βρείτε τι καμπύλη παριστάνει.

(β) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η καμπύλη τέμνει τους άξονες συντεταγμένων καθώς και η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο  $(0, 1)$  αυτής.

(γ) Να μετατραπεί η καμπύλη σε απλούστερη αναγνωρίσιμη μορφή.

(δ) Να σχεδιαστεί η καμπύλη προσεγγιστικά στο αρχικό σύστημα  $Oxy$ .

**Άσκηση 1.6** Στο επίπεδο  $Oxy$  δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y - 8 = 0.$$

- (α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει μια υπερβολή  $C$ .
- (β) Να βρεθούν οι ημιάξονες και η εκκεντρότητα της  $C$ .
- (γ) Να σχεδιάσετε την  $C$  στο σύστημα  $Oxy$ .
- (δ) Βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της  $C$  στο σύστημα  $Oxy$ .

**Άσκηση 1.7** Στο επίπεδο  $Oxy$  δίνεται η εξίσωση

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 4x + 4y - 4 + 8\lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (α) Για ποιές τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση παριστάνει ζευγός ευθειών; Να βρεθούν οι ευθείες για αυτές τις τιμές του  $\lambda$ .
- (β) Αφού αποδείξετε ότι για  $\lambda = 1$  η εξίσωση παριστάνει υπερβολή, να βρεθούν οι ημιάξονές της και η εκκεντρότητά της.
- (γ) Να βρεθούν, στο σύστημα  $Oxy$ , οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής του ερωτήματος (β).